## Решения на задачите от републиканския кръг на Първата национална олимпиада по астрономия

### *ученици X ÷ XII клас*

1. Слънцето има маса около 1 000 пъти по-голяма от тази на Юпитер, така че размерите на областите, където гравитационното поле на Юпитер е сравнимо с това на Слънцето, са около $10^6$ пъти по-малки от радиуса на планетната орбита. Заедно с това, времето на взаимодействие на кометата с Юпитер е несравнимо по-малко от периода на обиколка на Юпитер и кометата около Слънцето, и следователно преместването на кометата за това време е нищожно. Затова можем да разбием движението на кометата на три независими етапа:

а) Движение на кометата от безкрайността по посока към Слънчевата система под действието на гравитационното поле на Слънцето;

б) "Мигновеното" завъртане в гравитационното поле на Юпитер;

в) Движение по елиптична орбита около Слънцето (като не се отчита влиянието на Юпитер).

Центростремителното ускорение, с което Юпитер се движи по своята орбита около Слънцето, трябва да е равно на ускорението, създавано от силата на привличане на Слънцето:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

където $M$ е масата на Слънцето, а $v$ е скоростта на Юпитер. От това условие получаваме:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad \textbf{( 2 т. )}$$

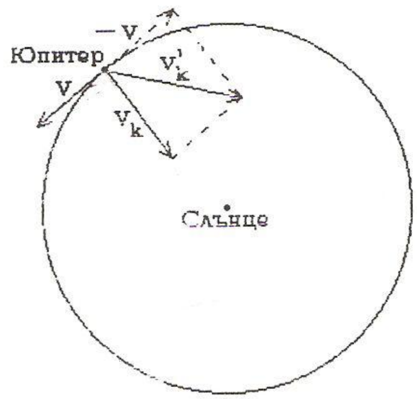
Скоростта на кометата $v_k$ при доближаване до Юпитер в края на първия етап от движението ѝ се определя от закона за запазване на енергията (в безкрайно отдалечената точка, тази скорост се полага за равна на нула):

$$\frac{v_k^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0\,, \qquad v_k = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v\sqrt{2}\,. \quad \textbf{( 3 т. )}$$

Посоките на скоростта на кометата и на Юпитер в началния момент от време са перпендикулярни. От векторната диаграма на фигурата, като приложим питагоровата теорема, получаваме за относителната скорост на кометата спрямо Юпитер:

$$v'_k = v\sqrt{3} \qquad \textbf{( 3 т. )}$$

$$\vec{v}'_k = \vec{v}_k - \vec{v}$$




След като гравитационното поле на Юпитер престане да действа на кометата (в началото на третия етап), скоростта на кометата относно Юпитер се изменя само по посока, но спрямо Слънцето тя остава равна на:

$$v_1 = v\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

и е противоположна по посока на скоростта на Юпитер. Вижда се, че тази скорост е по—малка от скоростта, с която Юпитер се движи по орбитата си ($v_1$ = 0.73 $v$). Следователно орбитата на кометата ще бъде елиптична с перихелий, значително по—близък до Слънцето. **( 3 т. )**

Сега кометата отново взаимодейства само със Слънцето. В афелия и перихелия скоростта на кометата става перпендикулярна на радиус-вектора с начало в Слънцето, и от закона за запазване на момента на импулса следва:

$$v_1 R = v_2 x \qquad \textbf{( 2 т. )}$$

а законът за запазване на енергията дава:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{GM}{x}\,. \qquad \textbf{( 2 т. )}$$

Като решим системата от последните две уравнения, за $x$ получаваме квадратно уравнение с два корена **( 1 т. )**.

Първият от тях е

$$x_1 = R = 5{,}2\ a.u.,$$

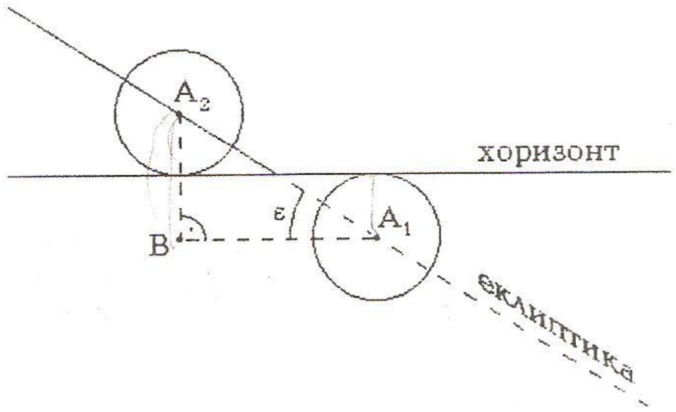
който се явява разстоянието в афелия, и за който двете уравнения се обръщат в тъждества. Вторият корен е:

$$\boxed{x_2 = R\,\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 0{,}37R = 1{,}9\,a.u.}$$

и представлява търсеното разстояние в перихелия. **( 2 т. )**

2. За разлика от местата с по-малки географски ширини, където Слънцето изгрява и залязва поради денонощното въртене на Земята около нейната ос, на полюса изгревът на Слънцето става поради видимото годишно движение на Слънцето по еклиптиката, което се дължи на обикалянето на Земята около Слънцето. **( 2 т. )**

**I случай:** Рефракцията не се отчита.




$A_1$, $A_2$ – положения на центъра на слънчевия диск съответно в началото и в края на изгрева. **( 1 т. )**

Тъй като за наблюдател на полюса небесният екватор съвпада с хоризонта, ъгълът между еклиптиката и хоризонта е ε. **( 1 т. )**

$$B\ \Delta A_1A_2B:\quad BA_2 = d_{\odot};$$

$$A_1A_2 = BA_2 / \sin\varepsilon = d_{\odot} / \sin\varepsilon. \qquad \textbf{( 1 т. )}$$

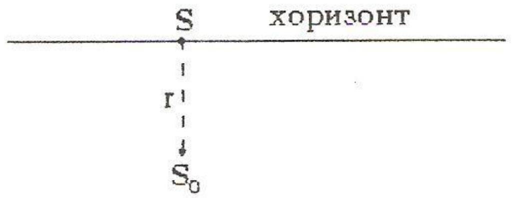
При движението си по еклиптиката Слънцето ще измине разстоянието $A_1A_2$ за време t. Ако $T_{\oplus}$ е периодът, за който то прави пълна обиколка по еклиптиката, равен на една година, то:

$$t / T_{\oplus} = A_1A_2 / 360^\circ$$

$$t = A_1A_2.T_{\oplus} / 360^\circ \qquad \textbf{( 1 т. )}$$

$$t = d_{\odot}.T_{\oplus} / 360^\circ.\ \mathrm{Sin}\ \varepsilon \approx 30^h\ 26^m \qquad \textbf{( 1 т. )}$$

**II случай:** Рефракцията се отчита.




Нека $S_0$ е истинското положение на една точка от небесната сфера, а S е видимото ѝ положение в момента, в който се наблюдава нейният изгрев на хоризонта. Видимото положение S на точката е отместено на ъглово разстояние r над точката $S_0$, като r е ъгълът на максимална рефракция. Вследствие на рефракцията изгревът на дадената точка от небесната сфера се наблюдава с интервал от време Δt по-рано, отколкото би се наблюдавал при липса на рефракция. Това избързване ще е едно и също за всяка точка от слънчевия диск. Следователно, макар че поради рефракцията моментите на изгрев на всички точки от слънчевия диск ще бъдат отместени напред във времето, общата продължителност на изгрева няма да се промени. **( 6 т. )**

3. Съгласно ефекта на Доплер лъчевата скорост на галактиката е $V = c.\Delta\lambda / \lambda_0$ **(2 т.)**. Ако приемем, че тази скорост е изцяло свързана с космологичното разширение на Вселената, по закона на Хъбъл ($v = H_0D$) можем да определим разстоянието до галактиката:

$$D = \frac{V}{H_0} = \frac{c\cdot\Delta\lambda}{H_0\lambda_0}, \qquad \textbf{( 2 т. )}$$

където c е скоростта на светлината, $H_0$ – константата на Хъбъл. Ако изразим ъгловия размер на галактиката в радиани

($d = 6' / 3438' = 1{,}75 \times 10^{-3}$ rad), то нейният линеен радиус ще бъде:

$$R = \frac{dD}{2} = \frac{d\cdot\Delta\lambda\cdot c}{2\lambda_0 H_0} \qquad \textbf{( 2 т. )}$$

Скоростта на движение на звездите в галактиката също ще определим по ефекта на Доплер: разширението на спектралните линии в галактиките е свързано с факта, че част от звездите се приближават към нас, а друга част се отдалечават от нас. Поради тази причина характерната скорост на звездите е $v = c.\sigma / 2\lambda_0$ **(6 т.)**. Това не е нищо друго, освен скоростта на движение на звездите около галактичния център, която от своя страна, е много близка до скоростта на въртене на звездите по кръгова орбита около галактичния ценър (поради това, че разстоянията от звездите в галактиката до нейния център са много големи). От равенството на центростремителното ускорение на ускорението, създавано от силата на тежестта: $V^2 \approx GM / R$, където M е масата на галактиката **( 3 т. )**. Тогава окончателно

$$\boxed{M = \frac{V^2 R}{G} = \frac{d\cdot\Delta\lambda\cdot\sigma^2\cdot c^3}{8\lambda_0^3 H_0 G} \approx 10^{40}\,kg}$$

или $5\times10^9$ слънчеви маси. **( 1 т. )**